MA1 – cvičení 22.12.20

Diferenciální rovnice 1. řádu – řešené příklady.

(1.) $y' = \dfrac{2x}{1+x^2}(1-y)$ zde: $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, spojitá fce v R

$g(y) = 1-y$, spojitá v R

Daná rovnice je rovnice, kterou můžeme „řešit" užitím separace proměnných, navíc, je to rovnice lineární – tedy, dle výsledků „teoretických", pro každou počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in R, y_0 \in R$ má rovnice právě jedno řešení (tj. jediné řešení).

a) „výpočet" řešení obecného:

(i) $g(y) = 0 \iff y = 1$, tedy $y(x) = 1,\ x \in R$ je řešení stacionární

(ii) $y(x) \neq 1$ pro ∀ $x \in R$; pak „separujeme":

$$\int \frac{y'(x)}{1-y(x)}\,dx = \int \frac{2x}{1+x^2}\,dy$$

Integrál $\displaystyle\int \frac{y'(x)}{1-y(x)}\,dx \underset{1VS}{=} \left|\begin{matrix} y(x) = y \\ y'(x)\,dx = dy \end{matrix}\right| = \int \frac{dy}{1-y} = -\ln|y-1| + c$

$$= -\ln|y(x)-1| + c$$

Tedy máme:

$$-\ln|y(x)-1| = \ln(1+x^2) + c \quad , \ x \in R \ , \ c \in R$$

$$\ln|y(x)-1| = -\ln(1+x^2) + \tilde{c} \quad , \ (\tilde{c} = -c)$$

tj. $\ln|y(x)-1| = \ln\left((1+x^2)^{-1}\right) + \tilde{c}$

Pak, uvážíme-li vztah (fce a k ní fce inverzní)

$$\ln a = b \iff a = e^{b} \qquad (a>0)$$

dostaneme:

$$|y(x)-1| = e^{\ln\left((1+x^2)^{-1}\right)+\tilde{C}}, \text{ tj.}$$

$$|y(x)-1| = e^{\ln\left((1+x^2)^{-1}\right)} \cdot e^{\tilde{C}}$$

$$(*) \qquad |y(x)-1| = \frac{e^{\tilde{C}}}{1+x^2}$$

Odstranění absolutní hodnoty:

$y(x)-1$ je funkce spojitá v R, $y(x) \neq 1$ v R $\Rightarrow$
$y(x)-1 \neq 0$ v R, a tedy platí (dle věty o nabývání mezihodnot):

a) $y(x)-1>0$ v R, tedy
$|y(x)-1| = y(x)-1$, a z $(*)$ dostaneme

$$y(x) = 1 + \frac{e^{\tilde{C}}}{1+x^2}, \quad x \in R$$

nebo

b) $y(x)-1<0$ v R, pak $|y(x)-1| = -(y(x)-1)$ a z $(*)$:

$$y(x) = 1 - \frac{e^{\tilde{C}}}{1+x^2}, \quad x \in R$$

Všechna řešení v (ii) lze tedy „zapsat" ve tvaru

$$\underline{y(x) = 1 + \frac{K}{1+x^2}, \quad x \in R, \; K \neq 0} \qquad \left(K = e^{\tilde{C}} \text{ nebo } K = -e^{\tilde{C}}\right), \; \tilde{C} \in R$$

(iii) „slepení" řešení zde nastat nemůže, neboť jen (pro $K \neq 0$)

$$\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{K}{1+x^2}\right) = 1 \quad !$$

Tedy, všechna řešení dané rovnice můžeme zapsat „dohromady"

(2(i) a (ii)) : $y(x) = 1 + \frac{K}{1+x^2}$, $K \in R$, $x \in R$ – obecné řešení

($K=0$ odpovídá stacionárnímu řešení)

b) Úlohy počáteční: – z počáteční podmínky „určíme" konstantu K – „dosazením počáteční podmínky" do řešení obecného:

1) $y(0) = 2$:

$$2 = 1 + \frac{K}{1+0^2} \Rightarrow K = 1$$

a řešení je $y(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2}$, $x \in R$

2) $y(0) = -1$:

$$-1 = 1 + \frac{K}{1+0} \Rightarrow K = -2.$$

a $y(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2}$, $x \in R$

3) $y(-2) = 0$:

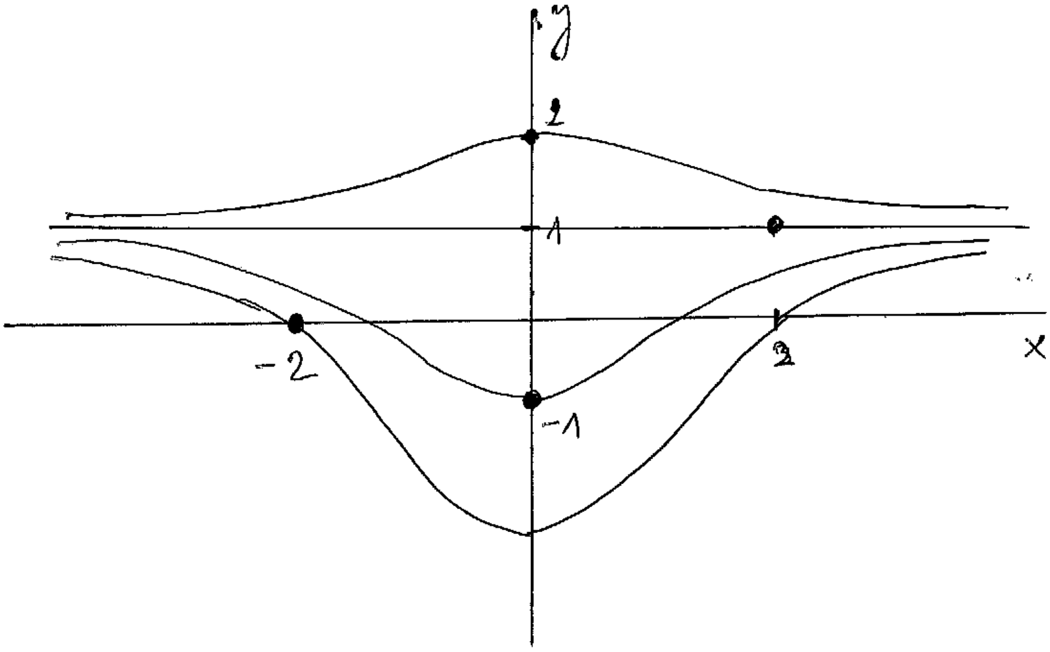
$$0 = 1 + \frac{K}{1+(-2)^2} \Rightarrow K = -5$$

a řešení: $y(x) = 1 - \frac{5}{1+x^2}$, $x \in R$

4) $y(2) = 1$ – zde „víme", že tato počáteční podmínka „vyhovuje" jen stacionární řešení
(tedy nemusíme „počítat" K)

$y(x) = 1$, $x \in R$

Náčrtek grafů řešení daných počátečních úloh:



Poznámka 1:

řešení $y(x) = 1 + \frac{k}{1+x^2}$, $k \neq 0$ jsou funkce spojité v R, sudé, mají všude derivaci vlastní (tj. grafy nemají „špičky") a

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{k}{1+x^2}\right) = 1,$$ tedy graf řešení stacionárního je asymptotou v $\pm\infty$ grafů všech řešení nestacionárních

Poznámka 2:

při separaci proměnných můžeme užít „zrychlený" zápis separace:

$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$ .., je-li $g(y) \neq 0$ v (c,d), pak

„ $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ " a integrujeme

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \quad \text{(atd.)}$$

② $y' = \frac{2}{x}(y-1)$

$x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, +\infty)$ (interval pro řešení počáteční úlohy bude „vybírat" x_0 pro – poč. podmínku $y(x_0) = y_0$, $x_0 \neq 0$)

a $y \in \mathbb{R}$; rovnice je opět rovnice „na separaci proměnných" a zároveň lineární, tedy opět platí, že každou počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$, $x_0 \neq 0$, $y_0 \in \mathbb{R}$ je dáno jediné řešení dané rovnice;

Obecné řešení:

(i) $y(x) = 1$, $x \in (-\infty, 0)$ a $y(x) = 1$, $x \in (0, +\infty)$ – – stacionární řešení

(ii) $y(x) \neq 1$ v $(-\infty, 0)$ nebo v $(0, +\infty)$, pak (užijeme „kratší" zápis):

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{2}{x}\, dx \quad , \text{ a integrací}$$

$$\ln|y-1| = 2 \ln x + C, \quad C \in \mathbb{R};$$

zde si ukážeme další „způsob" odstranění ln z $\ln|y-1|$: užijeme toho, že $\ln x$ je funkce „prostá", tedy platí

$$(*) \quad \ln A = \ln B \iff A = B \quad (A > 0, B > 0);$$

zde: $\ln|y-1| = \ln x^2 + \ln e^C$, tedy

$\ln|y-1| = \ln(e^C \cdot x^2)$ a dle $(*)$ $\iff$

$\iff \quad |y-1| = e^C x^2 \quad , x \in (-\infty, 0) \vee x \in (0, +\infty)$

A odstranění absolutní hodnoty (než řáč „rychleji"):

když $y(x)-1>0$ v $(-\infty,0)$ v v $(0,+\infty)$, pak $|y(x)-1| = y(x)-1$

a tedy: $y(x)-1 = e^{c}x^{2}$ a

$y(x) = 1+e^{c}x^{2}$, $x\in(-\infty,0)$ nebo $x\in(0,+\infty)$

nebo $y(x)-1<0$ v $(-\infty,0)$, v $(0,+\infty)$, pak $|y(x)-1| = -(y(x)-1)$

a tedy $-(y(x)-1) = e^{c}x^{2}$, pak

$y(x) = 1-e^{c}x^{2}$ v $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$,

„a dohromady": $y(x) = 1+Kx^{2}$, $K\neq 0$ ($K=e^{c}$ nebo $K=-e^{c}$)

(iii) slabosy opět „nejsou", neboť sice $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx^{2}) = 1$, ale řešení v bodě $x=0$ nejsou definována, rovnice je dána pro $x\neq 0$, $y\in R$.

Tedy, obecné řešení dané rovnice je (přidáme k (ii) ještě řešení stacionární)

$y(x) = 1+Kx^{2}$, $K\in R$, $x\in(-\infty,0)$ nebo $x\in(0,+\infty)$

Řešení počáteční úlohy:

Zkusme „obecně": hledáme řešení, pro které je $y(x_0)=y_0$, $x_0\neq 0$, $y_0\in R$:

pak: $y_0 = 1+Kx_0^{2} \Rightarrow K = \dfrac{y_0-1}{x_0^{2}}$ – dána jednoznačně

a $y_{poč}(x) = 1+\dfrac{y_0-1}{x_0^{2}}\cdot x^{2}$, $x\in(-\infty,0)$, je-li $x_0\in(-\infty,0)$;
$x\in(0,+\infty)$, je-li $x_0\in(0,+\infty)$.

a „konkrétně“:

1) $\underline{y(1)=1}$: $\underline{y(x)=1\,,\ x\in(0,+\infty)}$ $(x_0=1>0)$

(stacionární řešení)

2) $\underline{y(2)=5}$: $K=\frac{4}{4}=1$ a pak

$y(x)=1+x^2\,,\ x\in(0,+\infty)$ $(x_0=2>0)$

3) $\underline{y(-1)=0}$: $K=\frac{0-1}{1}=-1$, pak

$\underline{y(x)=1-x^2\,,\ x\in(-\infty,0)}$ $(x_0=-1<0)$

4) $\underline{y(-1)=2}$ $K=\frac{2-1}{1}=1$

a $y(x)=1+x^2\,,\ x\in(-\infty,0)$

(také lze konstantu K hledat „dosazením“ počáteční podmínky do vztahu pro obecné řešení – jako v příkladu 1)

<u>Náčrtek grafů řešení</u>

(„čárkované“ jsou náčrtky „dalších“ řešení)